

Concours externe de recrutement de professeurs agrégés
Section Economie et gestion (alors appelée « Techniques économiques de gestion »)
Session 1971
ETUDE DE CAS
Durée de l'épreuve : 6 heures

SUJET

THEME 1

Les laboratoires SINTESI fabriquent et vendent trois spécialités pharmaceutiques :

- le produit A : comprimés en boîtes ;
- le produit B : comprimés en boîtes ;
- le produit C : ampoules en coffrets.

Ces trois produits sont fabriqués dans des unités de production différentes.

Le produit A est obtenu à l'aide d'un acide réactif R (non stockable) fabriqué dans un atelier spécialisé : R.

Le produit a est utilisé : soit pour la vente sous forme de comprimés ;
soit pour la fabrication des produits B et C.

Les produits A, B et C sont conditionnés dans deux ateliers : « Boîtes » et « Coffrets ».

Le tableau en *annexe 1* donne :

- la liste des sections auxiliaires et principales qui composent l'entreprise ;
- le budget 1970 des charges fixes annuelles de chacune de ces sections ;
- la capacité annuelle de production des sections principales ;
- la composition des charges variables à l'unité de produit fabriqué.

L'année 1970 est divisée en 12 périodes égales. Pour la première période sont donnés en *annexe 2* les résultats obtenus pour les charges variables.

La politique de l'entreprise consiste à produire des boîtes B et des coffrets C de préférence aux boîtes A. En conséquence, les sections A, B et C peuvent travailler au maximum de leur capacité productive, par contre, les sections R « Conditionnement » et « Ventes » connaissent un chômage structurel.

Ainsi le plein emploi dans l'atelier A a conduit à une production maximale de 1 800 kg de A absorbant une production de R égale à $0,05 \text{ kg} \times 1\ 800 = 90 \text{ kg}$; le sous emploi de R est le résultat d'un déséquilibre structurel

QUESTIONS

Remarque préliminaire. - Pour les trois questions qui vont suivre, aucun calcul n'est à proprement parler exigé. Les données chiffrées communiquées en annexes 1 et 2 peuvent servir à la compréhension du système et à l'illustration du raisonnement.

Première question

On se propose d'analyser les coûts selon le « système n° 1 » dont le schéma est joint. Les charges variables sont incorporées aux différents comptes de coûts en fonction des quantités préétablies aux prix préétablis. Des filtres « Ecart sur prix » et « Ecart sur quantités de facteur F pour le produit P » retiennent tous les écarts par rapport aux normes techniques et aux normes de coûts. Dans chaque atelier, les documents de saisie de l'information portent référence des quantités de facteur consommées par chaque produit. Les charges fixes font l'objet d'une analyse distincte dans les comptes « Ecart sur budget des charges fixes » et « Ecart d'activité des sections principales » (On a renoncé à la répartition des sections auxiliaires dans les sections principales).

Le système est-il correct ?

Deuxième question

On diversifie considérablement la fabrication. Toute section productive devient ainsi un atelier fabriquant n produits différents. On renonce alors dans chaque atelier à noter la consommation de chaque facteur productif par chaque produit fabriqué. Dans chaque atelier :

- on introduit une unité d'œuvre avec son coût standard (1'heure machine dans les ateliers R, A, B, C ; l'heure ouvrier dans les ateliers « Conditionnement ») ;
- on valorise la production sur la base d'un prix standard du kilogramme, du litre, de la boîte ou du coffret obtenus.

Comment doit être modifié le système n° 1 ?

N.B. On admettra que le coût de chaque atelier ne comprend pas le coût des matières premières incorporées, par contre le coût des matières consommables (éther et acides) reste un élément du coût de l'atelier.

Troisième question

La consommation des prestations des sections auxiliaires varie beaucoup selon les sections productives : c'est en particulier le cas de la section « Entretien ». Il est décidé de les répartir entre les sections principales.

Sachant que les sections auxiliaires sont dotées d'une unité d'œuvre avec un coût standard et qu'il existe des normes de consommation des unités d'œuvre des sections auxiliaires par les principales, comment doit être aménagé le système adopté dans la seconde question ?

Annexe 1

N° Ligne		Administration	Etudes	Prospection médicale et pharmaceutique	Entretien
2	Charges fixes annuelles budgétées	1 320 000	1 212 000	960 000	135 000
3	Capacité de production				
4	Charges variables sur les quantités produites				
5	<i>Nature</i>	<i>Prix unitaire prévu</i>		<i>Consommation prévue</i>	
6	Matière M1	2 000 F le kg		1,5 kg pour 1 kg de R	
7	Actif réactif R	Coût de production prévu		0,05 kg pour 1 kg de A	
8	Matière M2	200 F le kg		1,2 kg pour 1 kg de A	
9				{ 10 litres pour 1 kg de A	
10	Ether E	1 F le litre		{ 6 litres pour 1 kg de B	
11				{ 19 litres pour 1 l de C	
12	Acide H1	100 F le tube		5 tubes pour 1 kg de B	
13	Acide H2	500 F le kg		0,05 kg pour 1 l de C	
14				{ 1,25 kg pour 1 kg de B	
15	Produit A	Coût de production prévu		{ 0,75 kg pour 1 l de C	
16				{ 3,3 g pour 1 boîte de A	
17	Produit B	Coût de production prévu		4,5 g pour 1 boîte de B	
18	Produit C	Coût de production prévu		10 cm ³ pour 1 coffret C	
19	Boite	0,3 F		1 boîte pour 1 boîte A ou B	
20	Coffret	0,6 F		1 coffret pour 1 coffret C	
21	Salaires	10 F l'heure		100 h pour 1 kg de R	
22				12 h pour 1 kg de A	
23				20 h pour 1 kg de B	
24				16 h pour 1 l de C	
25		6 F l'heure		0,05 heure pour 1 boîte	
26				0,10 heure pour 1 coffret	
27	Energie	0,08 F le kWh		2 000 kWh pour 1 kg de R	
28				25 kWh pour 1 kg de A	
29				50 kWh pour 1 kg de B	
30				75 kWh pour 1 l de C	
31	Autres charges variables	10 % du prix de vente		Boîte A : prix de vente = 15 F	
32				Boîte B : prix de vente = 25 F	
33				Coffret C : prix de vente = 30 F	

Suite annexe 1

N° Ligne	R	A	B	C	Conditionnement boîtes	Conditionnement Coffrets	Ventes
2	360 000	324 000	57 600	192 000	76 000	9 600	642 000
3	120 kg	1 800 kg	360 kg	480 l	500 000 boîtes	50 000 coffrets	600 000 boîtes ou coffrets
4	3 000 F 240 10	6	19
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14	
15	1 000	120	200	160	0,3	0,6
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25	160	2	4	6	0,3	0,6
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							

Annexe 2

Résultat première période

	Entrées		Sorties en quantité pour						
	Quantités	Prix unitaire	R	A	B	C	Boîtes A	Boîtes B	Coffrets C
<i>Matières achetées</i>									
Matière M1	15 kg	2 010	13 kg						
Matière M2	200 kg	210		200 kg					
Ether	2 500 l	1		1 500 l	200 l	600 l			
Acide H1	200 t	90			180 t				
Acide H2	25 kg	550				2 kg			
Boîtes	40 000	0,31					26 000	7 000	
Coffrets	4 000	0,62							3 200
<i>Produits fabriqués</i>									
R	8			8					
A	160				42	25	80		
B	32							31	
C	30								30
Boîtes A	25 000						20 000 vendues		
Boîtes B	6 600							6 000 vendues	
Coffrets C	3 000								3 000 vendues
<i>Salaires (salaire horaire réel)</i>									
R		10	900 h						
A		11		2000 h					
B		11			600 h				

C		9				600 h			
Boîtes A		6,5					1 200 h		
Boîtes B		6						330 h	
Coffrets C		6							400 h
<i>Energie (prix du kWh)</i>									
R		0,08	16 200						
A		0,08		4 250					
B		0,08			2 200				
C		0,08				1 900			
<i>Autres charges variables</i>									
Boîtes A							28 000		
Boîtes B								16 000	
Coffrets C									9 000

Système n° 1

Achats réfléchis	Ecart sur prix d'achat	Inventaire permanent matières boîtes	Ecart sur quantités	Coût de R		Ecart sur quantité de R
Frais de personnel réfléchis	Ecart sur prix horaire de travail	Inventaire permanent matières consommables	Ecart sur quantités de travail	Coût de A	Inventaire permanent de A	Ecart sur quantité de A
Fournitures extérieures réfléchies	Ecart sur prix d'achat		Ecart sur quantités de fourn. ext.	Coût de B	Inventaire permanent de B	Ecart sur quantité de B
				Coût de C	Inventaire permanent de B	Ecart sur quantité de B
Autres charges réfléchies	Ecart sur budget des charges fixes des sections principales	Ecart d'activité des sections principales		Coût des boîtes A	Inventaire permanent des boîtes A	Prix de revient des boîtes A
				Coût des boîtes B	Inventaire permanent des boîtes B	Prix de revient des boîtes B
Ventes réfléchies	Ecart sur budget des charges fixes des sections auxiliaires	Sections auxiliaires		Coût des coffrets C	Inventaire permanent des coffrets C	Prix de revient des coffrets C
		Résultat analytique				

THEME 2

L'activité de la section R conduit à la fabrication de deux produits X et Y.

Au cours de 10 périodes consécutives, on a relevé les coûts de la section et les quantités produites

Périodes	Coût total de la section	Quantités en kg	
		X	Y
1	1 300	6	5
2	1 000	4	4
3	700	4	2
4	1 400	6	5
5	1 500	6	9
6	700	2	2
7	700	4	2
8	1 000	4	4
9	600	2	2
10	1 100	2	5

QUESTIONS

Première question

A l'aide d'un modèle linéaire à deux variables explicatives X et Y, on demande en utilisant de préférence une méthode matricielle, une estimation :

- des coûts fixes de la section ;

- des coûts unitaires variables relatifs à la transformation de 1 kg de X et 1 kg de Y.

Afin de limiter l'importance des calculs, on communique :

$$\sum_1^{10} S = 10\,000 \quad \sum_1^{10} SX = 43\,600 \quad \sum_1^{10} SY = 45\,900 \quad \sum_1^{10} X = 40 \quad \sum_1^{10} Y = 40$$

$$\sum_1^{10} X^2 = 184 \quad \sum_1^{10} Y^2 = 204 \quad \sum_1^{10} XY = 180$$

Seconde question

Quelle est la valeur de la liaison linéaire exprimant la corrélation qui semble exister entre le coût de la section, X et Y.

Troisième question

Quelles peuvent être les conséquences de ces résultats sur l'application du système de contrôle des coûts ?

THEME 3

On schématiser ainsi la structure de production de l'entreprise : le centre A produit deux biens intermédiaires L et M ; le centre B produit à partir de L et M trois biens destinés à la vente : X, Y et Z. Son objectif est la maximisation de la marge sur coût variable.

La production du centre A est soumise aux contraintes : $3L + 2M \leq 120$

$$L + 2M \leq 80$$

$$3L + M \leq 105$$

La production du centre B est soumise aux contraintes : $X + 3Y + 6Z \leq L$

$$3X + 2Y + Z \leq M$$

Maximum de $F = 12X + 15Y + 18Z$ (marge totale)

On recherche l'optimum global, c'est à dire la maximisation de la marge globale. Pour cela, on envisage un jeu itératif de type suivant :

1° Détermination de l'optimum de B lorsque A livre un volume de production conforme à l'une de ses solutions de base réalisables.

2° Détermination de l'optimum de A par maximisation du chiffre d'affaires réalisé par la « vente » de ses produits L et M au prix duaux communiqués par le centre B.

3° Nouvelle détermination de l'optimum de B lorsque A livre les quantités L et M optimisées en 2° ; etc.

N.B. Le passage au programme dual et l'adoption de solutions graphiques allègent très sensiblement les calculs.

Discussion

La convergence vers l'optimum global est-elle obligatoire ?

Existe-t-il une méthode de séparation du problème d'ensemble en deux problèmes compatibles avec l'optimum global ?

Dégager les implications économiques de la méthode adoptée.

ELEMENTS DE CORRIGE

THEME 1

Première question

• Description

Les entrées en inventaire permanent de matières premières (matières et boîtes) et de matières consommables sont effectuées aux coût unitaire préétabli après que des écarts sur prix d'achat (qui ne sont pas analysés en détail) soient déterminés. Les sorties de stock des matières premières et boîtes et consommables sont effectués en quantités réelles et en coût unitaire préétabli.

Le calcul du coût de production de R est effectué au coût préétabli. Il se compose de l'utilisation préétablie de la matière première M1 sortie de l'inventaire permanent et un écart sur quantités consommées est déterminé au moment du calcul du coût de production. Il comprend également des charges de personnel utilisées qui sont, elles aussi, estimées au coût préétabli, ainsi que des écarts sur prix horaire de travail et des écarts sur quantités de travail. Il est tenu compte également des fournitures extérieures (énergie) au coût préétabli, des écarts sur prix d'achat et sur quantités de fournitures extérieures étant constatées a priori.

Il n'y a pas de stockage de R.

Le calcul de la production A se compose d'une quantité préétablie de R (la partie R non utilisée se trouve en écart de quantité de R), de matières premières (M2) de matières consommables (éther) de charges de personnel et de fournitures extérieures. Pour les matières consommables, il est dégagé un écart sur quantité, pour les charges de personnel et les fournitures extérieures, il est dégagé comme pour la production de R des écarts sur prix horaire de travail, des écarts sur quantités de travail, des écarts sur prix d'achat et sur quantités de fournitures extérieures. Le produit A fabriqué entrera ensuite en stock au produit de la quantité réelle par le coût préétabli.

Les calculs de coûts de production de produits de B et de C sont déterminés également au coût préétabli pour des quantités réelles. Il seront composés de la consommation de produit A, un écart sur quantité portant sur la différence entre la quantité de A utilisée et la quantité nécessaire étant déterminé (éventuellement) à la sortie de stock. Comme pour le coût de production de A, on tiendra compte de la consommation de matières consommables (éther E et acides H1 pour B et H2 pour C) des frais de personnel et des fournitures extérieures. On y retrouve pour les matières consommables, pour les frais de personnel et les fournitures extérieures, le même type d'écart sur la production de A.

On peut remarquer qu'aucune charge indirecte, ni fixe, ni variable, n'est imputée aux coûts de production de R, A, B et C.

Pour le calcul des coûts des boîtes A, des boîtes B et des coffrets C, ceux-ci sont déterminées à un coût préétabli. Les consommations de A, B, C sont faites en quantités préétablies et des boîtes correspondantes et en coût unitaire préétabli, un écart sur quantité de A, B et C et des matières premières boîtes étant effectué à la sortie du stock. Il sera aussi imputé des frais de personnel au coût préétabli, des écarts sur prix horaires et des quantités de travail étant calculés. Aucune charge indirecte n'est non plus imputée au coût de production des boîtes et des coffrets.

Les coûts de revient se composent du coût de production des boîtes et coffrets vendus et de l'imputation des autres charges des sections auxiliaires et principales.

Il est à remarquer d'abord que les sections auxiliaires (comme le dit l'énoncé) ne sont pas ventilés dans les sections principales mais sont directement imputées au prix de revient (coût de revient dans le vocabulaire du PCG 1982). Les sections principales sont également imputées aux prix de revient. Pour ce qui concerne les sections principales, elles sont évaluées à un coût préétabli correspondant à l'activité réelle (il n'y pas d'écart sur rendement et il n'est dégagé qu'un écart sur budget sur frais fixes, qui est une forme d'écart sur prix et un écart d'activité, mesurant la suractivité ou la sous activité des sections, lequel est aussi un écart sur frais fixes). Pour les sections auxiliaires (administration, études et recherche, prospection médicale et entretien) il est considéré qu'il ne peut y avoir de suractivité ou de sous activité et il n'est déterminé qu'un écart sur budget de frais fixes. Il est

remarquer qu'il n'est pas tenu de comptes de section pour les sections principales, ce qui sur un plan pratique peut être gênant pour effectuer les imputations aux coûts.

Les coûts variables des sections principales et auxiliaires sont imputées directement aux prix (coûts) de revient, des écarts étant alors constatés sur les budgets de charges fixes des sections auxiliaires et principales.

On remarque aussi que le résultat analytique n'est pas détaillé.

- Synthèse de l'analyse critique

Jusqu'au niveau du coût de production ne sont imputées que les charges directes (matières premières M1 et M2) et consommables (éther E, acide H1 et H2), boîtes, produits semi finis R, A, B, salaires, énergie) les charges indirectes variables ou considérées comme telles (du fait les écarts déterminés sur activité ou sur budget) étant imputés aux prix de revient. Si il est distingué des sections auxiliaires, il n'est pas distingué de sections principales, l'ensemble étant regroupé dans une rubrique « autres charges variables » Le résultat analytique n'est pas détaillé.

- En utilisant les comptes de la classe 9 du plan comptable de 1957 on aurait eu les écritures suivantes : (avec les éléments QP = quantité préétablie, QR = quantité réelle, CP = coût unitaire préétabli, CR = coût unitaire réel, PV = prix de vente réel). Les écarts sont portés au crédit en + s'ils favorables, en - s'ils sont défavorables.

941	Inventaire permanent matières premières boîtes	QR × CP	
942	Inventaire permanent matières consommables	QR × CP	
905	Achats réfléchis		QR × CR
96..	Ecarts sur prix d'achat		QR (CP - CR)
	<i>Entrées en stock de matières premières</i>		
93.	Coût de R	QR × CP	
941	Inventaire permanent matières premières		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
906.	Frais de personnel réfléchis		QR × CR
906.	Fournitures extérieures réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
96.	Ecarts sur prix d'achat fournitures extérieures		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités fournitures extérieures		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production de R</i>		
93.	Coût de A	QR × CP	
93.	Coût de R		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de R		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières premières		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
942	Inventaire permanent matières consommables		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
906.	Frais de personnel réfléchis		QR × CR
906.	Fournitures extérieures réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
96.	Ecarts sur prix d'achat fournitures extérieures		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités fournitures extérieures		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production de A</i>		
944	Inventaire permanent A	QR × CP	
93.	Coût de A		QR × CP
	<i>Entrée en stock A</i>		

93.	Coût de B	QR × CP	
944	Inventaire permanent de A		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de A		CP (QP - QR)
942	Inventaire permanent matières consommables		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
906.	Frais de personnel réfléchis		QR × CR
906.	Fournitures extérieures réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
96.	Ecarts sur prix d'achat fournitures extérieures		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités fournitures extérieures		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production de B</i>		
944	Inventaire permanent B	QR × CP	
93.	Coût de B		QR × CP
	<i>Entrée en stock B</i>		
93.	Coût de C	QR × CP	
944	Inventaire permanent de A		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de A		CP (QP - QR)
942	Inventaire permanent matières consommables		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités matières consommables		CP (QP - QR)
906.	Frais de personnel réfléchis		QR × CR
906.	Fournitures extérieures réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
96.	Ecarts sur prix d'achat fournitures extérieures		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités fournitures extérieures		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production de C</i>		
944	Inventaire permanent C	QR × CP	
93.	Coût de C		QR × CP
	<i>Entrée en stock C</i>		
93.	Coût des boîtes A	QR × CP	
944	Inventaire permanent A		QR × CP
96.	Ecart sur quantité A		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières boîtes		QR × CP
96.	Ecart sur quantités		CP (QP - QR)
906	Frais de personnel réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production des boîtes A</i>		
945	Inventaire permanent boîtes A	QR × CP	
93.	Coût des boîtes A		QR × CP
	<i>Entrée en stock, des boîtes A</i>		
93.	Coût des boîtes B	QR × CP	
944	Inventaire permanent B		QR × CP
96.	Ecart sur quantité B		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières boîtes		QR × CP
96.	Ecart sur quantités		CP (QP - QR)
906	Frais de personnel réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production des boîtes B</i>		

945	Inventaire permanent boîtes B	QR × CP	
93.	Coût des boîtes B		QR × CP
	<i>Entrée en stock des boîtes B</i>		
93.	Coût des coffrets C	QR × CP	
944	Inventaire permanent C		QR × CP
96.	Ecart sur quantité C		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières boîtes		QR × CP
96.	Ecart sur quantités		CP (QP - QR)
906	Frais de personnel réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecart sur quantités de travail		CP (QP - QR)
	<i>Coût de production des coffrets C</i>		
945	Inventaire permanent coffrets C	QR × CP	
93.	Coût des coffrets C		QR × CP
	<i>Entrée en stock des coffrets C</i>		
92.	Sections auxiliaires	QP × CP	
906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des charges fixes des sections auxiliaires		CP (QP - QR)
	<i>Sections auxiliaires</i>		
93.	Prix de revient des boîtes A	QR × CP	
945	Inventaire permanent des boites A		QR × CP
92.	Sections auxiliaires		QP × CP
906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des charges fixes des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart d'activité des sections principales		CP (QP - QR)
	<i>Prix de revient boîtes A</i>		
93.	Prix de revient des boîtes B	QR × CP	
945	Inventaire permanent des boites B		QR × CP
92.	Sections auxiliaires		QP × CP
906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des charges fixes des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart d'activité des sections principales		CP (QP - QR)
	<i>Prix de revient boîtes B</i>		
93.	Prix de revient des coffrets C	QR × CH	
945	Inventaire permanent des coffrets C		QR × CP
92.	Sections auxiliaires		QP × CP
906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des charges fixes des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart d'activité des sections principales		CP (QP - QR)
	<i>Prix de revient coffrets C</i>		
907	Ventes réfléchies	QR × PV	
93.	Prix de revient des boîtes A		QR × CH
93.	Prix de revient des boîtes A		QR × CH
93	Prix de revient des coffrets C		QR × CH
93	Résultat analytique		
	<i>Résultat</i>		

Deuxième question

Pour répondre à cette question, nous proposons de suivre la proposition au travers du modèle d'écritures présenté ci-dessus (à notre avis plus lisible que la reproduction du tableau du système 1).

Il y a 6 sections principales où seront affectés les différentes productions (ateliers R, A, B, C et les ateliers Conditionnement Boîtes et Conditionnement Coffrets). Les sections auxiliaires ne seront pas réparties au niveau de la production (comme dans la première question) : elles le seront dans la troisième question.

Pour chaque section, le coût imputé sera égal à l'utilisation réelle (heures machine pour les ateliers R, A, B, C, et heures ouvriers pour l'atelier conditionnement). Il sera dégagé au niveau de chaque section un écart sur budget égal à la différence entre le budget flexible (somme du coût fixe prévisionnel majoré du produit du coût variable unitaire par la quantité prévisionnelle correspondant à l'activité réelle) et un écart sur activité (égal la différence en coût fixe entre l'activité prévue et l'activité réelle). Au niveau de l'imputation de la section, il sera constaté un écart sur rendement.

Par exemple si l'on prend la première période, pour la section A (qui produit le produit semi ouvré A) on devrait avoir (pour 160 unités produites et 40 heures machine) :

- Ether E : $10 \times 160 \times 1 =$	1 600 F
- Main d'œuvre : $12 \times 160 \times 10 =$	19 200 F
- Energie : $25 \times 160 \times 0,08 =$	320 F
- Autres charges (hypothèse : 40 heures machine pour faire 160 unités) :	
40×120 (dont 50 fixes) =	<u>4 800 F</u>
	25 920 F

soit par heure machine $25\,920 / 40 = 648$ F l'heure machine.

Supposons qu'il ait fallu 45 heures pour effectuer le travail et que l'on ait dépensé en fait les éléments suivants :

- Ether E : $1\,500 \times 1 =$	1 500 F
- Main d'œuvre : $2\,000 \times 11 =$	22 000 F
- Energie : $4\,250 \times 0,10 =$	425 F
- Autres charges	<u>6 000 F</u>
	29 925 F

Il serait constaté un écart global de $25\,920 - 29\,925 = 4\,005$ (défavorable). Cet écart peut s'analyser ainsi :

Ecart sur rendement : $(40 - 45) \times 120 =$	- 600
Ecart sur activité $(45 - 40) \times 50 =$	+ 250
Ecart sur budget autres charges : $40 \times 50 + 45 \times 70 - 6\,000 =$	- 850
Ecart sur quantité éther : $(160 \times 10 - 1\,500) \times 1$	+ 100
Ecart sur prix horaire de travail : $2\,000 \times (10 - 11)$	- 2 000
Ecart sur quantité de travail : $(12 \times 160 - 2\,000) \times 10$	- 800
Ecart sur prix d'achat fournitures ext. : $4\,250 \times (0,08 - 0,10)$	- 85
Ecart sur quantité fournitures ext. $(25 \times 160 - 4\,250) \times 0,08 =$	<u>- 20</u>
	- 4 005

Nous avons respecté l'énoncé et n'avons pas recherché d'évaluer un résultat sur ventes de chacun des produit, considérant que les laboratoires SINTESI s'intéressent en priorité à leurs coûts.

On aurait le schéma d'écriture suivant :

941	Inventaire permanent matières premières boîtes	QR × CP	
942	Inventaire permanent matières consommables	QR × CP	
905	Achats réfléchis		QR × CR
96..	Ecart sur prix d'achat		QR (CP - CR)
	<i>Entrées en stock de matières premières</i>		

92.	Section atelier R	QP × CP	
92.	Section atelier A	QP × CP	
92.	Section atelier B	QP × CP	
92.	Section atelier C	QP × CP	
92.	Section atelier Conditionnement boîtes	QP × CP	
92.	Section atelier Conditionnement coffrets	QP × CP	
942	Inventaire permanent matières consommables		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités matières consommables		CP (QP - QR)
906.	Frais de personnel réfléchis		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
906.	Fournitures extérieures réfléchies		QR × CR
96.	Ecarts sur prix d'achat fournitures extérieures		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités fournitures extérieures		CP (QP - QR)
906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart d'activité des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart de rendement des sections principales		CP (QP - QR)
	<i>Affectation aux ateliers des charges de matières consommables, de frais de personnel, de fournitures extérieures, d'autres charges réfléchies</i>		
93.	Coût de R	QR × CP	
941	Inventaire permanent matières premières		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
92	Section atelier R		QP × CP
	<i>Coût de production de R</i>		
93.	Coût de A	QR × CP	
93.	Coût de R		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de R		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières premières		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
92.	Section atelier A		QP × CP
	<i>Coût de production de A</i>		
944	Inventaire permanent A	QR × CP	
93.	Coût de A		QR × CP
	<i>Entrée en stock A</i>		
93.	Coût de B	QR × CP	
944	Inventaire permanent de A		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de A		CP (QP - QR)
92.	Section Atelier B		QP × CP
	<i>Coût de production de B</i>		
944	Inventaire permanent B	QR × CP	
93.	Coût de B		QR × CP
	<i>Entrée en stock B</i>		
93.	Coût de C	QR × CP	
944	Inventaire permanent de A		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de A		CP (QP - QR)
92.	Section atelier C		QP × CP
	<i>Coût de production de C</i>		

944 93.	Inventaire permanent C Coût de C <i>Entrée en stock C</i>	QR × CP	QR × CP
93. 944 96. 941 96. 92.	Coût des boîtes A Inventaire permanent A Ecart sur quantité A Inventaire permanent matières boîtes Ecart sur quantités Section atelier conditionnement boîtes <i>Coût de production des boîtes A</i>	QR × CP	QR × CP CP (QP - QR) QR × CP CP (QP - QR) QP × CP
945 93.	Inventaire permanent boîtes A Coût des boîtes A <i>Entrée en stock, des boîtes A</i>	QR × CP	QR × CP
93. 944 96. 941 96. 92.	Coût des boîtes B Inventaire permanent B Ecart sur quantité B Inventaire permanent matières boîtes Ecart sur quantités Section atelier conditionnement boîtes <i>Coût de production des boîtes B</i>	QR × CP	QR × CP CP (QP - QR) QR × CP CP (QP - QR) QP × CP
945 93.	Inventaire permanent boîtes B Coût des boîtes B <i>Entrée en stock des boîtes B</i>	QR × CP	QR × CP
93. 944 96. 941 96. 92.	Coût des coffrets C Inventaire permanent C Ecart sur quantité C Inventaire permanent matières boîtes Ecart sur quantités Section conditionnement coffrets <i>Coût de production des coffrets C</i>	QR × CP	QR × CP CP (QP - QR) QR × CP CP (QP - QR) QP × CP
945 93.	Inventaire permanent coffrets C Coût des coffrets C <i>Entrée en stock des coffrets C</i>	QR × CP	QR × CP
92. 906 96.	Sections auxiliaires Autres charges réfléchies Ecart sur budget des charges fixes des sections auxiliaires <i>Sections auxiliaires</i>	QP × CP	QR × CR CP (QP - QR)
93. 945 92.	Prix de revient des boîtes A Inventaire permanent des boîtes A Sections auxiliaires <i>Prix de revient boîtes A</i>	QR × CP	QR × CP QP × CP

93.	Prix de revient des boîtes B	QR × CH	
945	Inventaire permanent des boites B		QR × CH
92.	Sections auxiliaires		QP × CP
	<i>Prix de revient boîtes B</i>		
93.	Prix de revient des coffrets C	QR × CH	
945	Inventaire permanent des coffrets C		QR × CH
92.	Sections auxiliaires		QP × CP
	<i>Prix de revient coffrets C</i>		
907	Ventes réfléchies	QR × PV	
93.	Prix de revient des boîtes A		QR × CH
93.	Prix de revient des boîtes A		QR × CH
93	Prix de revient des coffrets C		QR × CH
93	Résultat analytique		
	<i>Résultat</i>		

Troisième question

Pour répondre à cette question, nous proposons également de suivre la proposition au travers du modèle d'écritures présenté ci-dessus (à notre avis plus lisible que la reproduction du tableau du système 1).

Il sera déterminé pour chaque section auxiliaire deux écarts : un écart sur budget des charges fixes (différence entre charges fixes prévues pour l'activité prévue et l'activité réelle) et un écart sur budget des frais variables (différence entre charges fixes prévues pour l'activité prévue et l'activité réelle).

Les sections auxiliaires seront imputées ensuite aux sections principales.

Il est à noter que dans ce système, il n'y a plus de frais imputés au niveau de la vente.

941	Inventaire permanent matières premières boîtes	QR × CP	
942	Inventaire permanent matières consommables	QR × CP	
905	Achats réfléchis		QR × CR
96..	Ecarts sur prix d'achat		QR (CP - CR)
	<i>Entrées en stock de matières premières</i>		
92.	Sections auxiliaires	QP × CP	
906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des charges fixes des sections auxiliaires		CP (QP - QR)
96.	Ecart sur budget des charges variables des sections auxiliaires		CP (QP - QR)
	<i>Sections auxiliaires</i>		
92.	Section atelier R	QP × CP	
92.	Section atelier A	QP × CP	
92.	Section atelier B	QP × CP	
92.	Section atelier C	QP × CP	
92.	Section atelier Conditionnement boîtes	QP × CP	
92.	Section atelier Conditionnement coffrets	QP × CP	
942	Inventaire permanent matières consommables		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités matières consommables		CP (QP - QR)
906.	Frais de personnel réfléchis		QR × CR
96.	Ecart sur prix horaire de travail		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités de travail		CP (QP - QR)
906.	Fournitures extérieures réfléchies		QR × CR
96.	Ecarts sur prix d'achat fournitures extérieures		QR (CP - CR)
96.	Ecarts sur quantités fournitures extérieures		CP (QP - QR)

906	Autres charges réfléchies		QR × CR
96.	Ecart sur budget des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart d'activité des sections principales		QR (CP - CR)
96.	Ecart de rendement des sections principales		CP (QP - QR)
92.	Sections auxiliaires		QP × CP
	<i>Affectation aux ateliers des charges de matières consommables, de frais de personnel, de fournitures extérieures, d'autres charges réfléchies</i>		
93.	Coût de R	QR × CP	
941	Inventaire permanent matières premières		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
92	Section atelier R		QP × CP
	<i>Coût de production de R</i>		
93.	Coût de A	QR × CP	
93.	Coût de R		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de R		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières premières		QR × CP
96.	Ecarts sur quantités		CP (QP - QR)
92.	Section atelier A		QP × CP
	<i>Coût de production de A</i>		
944	Inventaire permanent A	QR × CP	
93.	Coût de A		QR × CP
	<i>Entrée en stock A</i>		
93.	Coût de B	QR × CP	
944	Inventaire permanent de A		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de A		CP (QP - QR)
92.	Section atelier B		QP × CP
	<i>Coût de production de B</i>		
944	Inventaire permanent B	QR × CP	
93.	Coût de B		QR × CP
	<i>Entrée en stock B</i>		
93.	Coût de C	QR × CP	
944	Inventaire permanent de A		QR × CP
96.	Ecarts sur quantité de A		CP (QP - QR)
92.	Section atelier C		QP × CP
	<i>Coût de production de C</i>		
944	Inventaire permanent C	QR × CP	
93.	Coût de C		QR × CP
	<i>Entrée en stock C</i>		
93.	Coût des boîtes A	QR × CP	
944	Inventaire permanent A		QR × CP
96.	Ecart sur quantité A		CP (QP - QR)
941	Inventaire permanent matières boîtes		QR × CP
96.	Ecart sur quantités		CP (QP - QR)
92.	Section atelier conditionnement boîtes		QP × CP
	<i>Coût de production des boîtes A</i>		

945 93.	Inventaire permanent boîtes A Coût des boîtes A <i>Entrée en stock, des boîtes A</i>	QR × CP	QR × CP
93. 944 96. 941 96. 92.	Coût des boîtes B Inventaire permanent B Ecart sur quantité B Inventaire permanent matières boîtes Ecart sur quantités Section atelier conditionnement boîtes <i>Coût de production des boîtes B</i>	QR × CP	QR × CP CP (QP - QR) QR × CP CP (QP - QR) QP × CP
945 93.	Inventaire permanent boîtes B Coût des boîtes B <i>Entrée en stock des boîtes B</i>	QR × CP	QR × CP
93. 944 96. 941 96. 92	Coût des coffrets C Inventaire permanent C Ecart sur quantité C Inventaire permanent matières boîtes Ecart sur quantités Section conditionnement coffrets <i>Coût de production des coffrets C</i>	QR × CP	QR × CP CP (QP - QR) QR × CP CP (QP - QR) QP × CP
945 93.	Inventaire permanent coffrets C Coût des coffrets C <i>Entrée en stock des coffrets C</i>	QR × CP	QR × CP
93. 945 92.	Prix de revient des boîtes A Inventaire permanent des boîtes A Sections auxiliaires <i>Prix de revient boîtes A</i>	QR × CP	QR × CP QP × CP
93. 945	Prix de revient des boîtes B Inventaire permanent des boîtes B <i>Prix de revient boîtes B</i>	QR × CH	QR × CH
93. 945	Prix de revient des coffrets C Inventaire permanent des coffrets C <i>Prix de revient coffrets C</i>	QR × CH	QR × CH
907 93. 93. 93. 93	Ventes réfléchies Prix de revient des boîtes A Prix de revient des boîtes A Prix de revient des coffrets C Résultat analytique <i>Résultat</i>	QR × PV	QR × CH QR × CH QR × CH

THÈME 2

On a :

$$1\,300 = CF + 6x + 7y + \varepsilon_1$$

$$1\,000 = CF + 4x + 4y + \varepsilon_2$$

$$700 = CF + 4x + 2y + \varepsilon_3$$

$$1400 = CF + 6x + 5y + \varepsilon_4$$

$$1500 = CF + 6x + 9y + \varepsilon_5$$

$$700 = CF + 2x + 2y + \varepsilon_6$$

$$700 = CF + 4x + 2y + \varepsilon_7$$

$$1000 = CF + 4x + 4y + \varepsilon_8$$

$$600 = CF + 2x + 2y + \varepsilon_9$$

$$1100 = CF + 2x + 5y + \varepsilon_{10}$$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

$$[S] = [A] \times \begin{bmatrix} CF \\ x \\ y \end{bmatrix} + [\varepsilon]$$

ou

$$+ [\varepsilon] = [S] - [A] \times \begin{bmatrix} CF \\ x \\ y \end{bmatrix}$$

Première question : estimation des coûts fixes de la section et de les coûts unitaires variables

Les matrices [A] et [S] se présentent comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \quad S = \begin{bmatrix} 1300 \\ 1000 \\ 700 \\ 1400 \\ 1500 \\ 700 \\ 700 \\ 1000 \\ 600 \\ 1100 \end{bmatrix}$$

Il y a lieu de multiplier la matrice A par la transposée de A : A'

On a A'A =

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	4	4	6	6	2	4	4	2	5
5	4	2	5	9	2	2	4	2	5

×

165
144
142
165
169
122
142
144
122
125

=

10	40	40
40	184	180
40	180	204

Il faut ensuite déterminer la matrice inverse de la matrice A'A

Il faut d'abord calculer le déterminant de la matrice A celui ci est de 6 560 = [10 × (184 × 204 - 180 × 180)] + [40 × (40 × 180 - 40 × 204)] + [40 × (40 × 180 - 40 × 184)].

Il s'agit ensuite de calculer la matrice des cofacteurs

	184	180	-	40	180		40	184
	180	204		40	204		40	180
-	40	40		10	40	-	10	40
	180	204		40	204		40	180
	40	40	-	10	40		10	40
	184	180		40	180		40	184

=

5 136	- 960	-160
- 960	440	- 200
- 160	- 200	240

Il faut ensuite transposer cette matrice

5 136	- 960	-160
- 960	440	- 200
- 160	- 200	240

et diviser chaque terme par le déterminant 6 560

0,782927	-0,146341	-0,024390
-0,146341	0,067073	-0,030488
-0,024390	-0,030488	0,036585

Il faut maintenant calculer le produit de A' par S

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	4	4	6	6	2	4	4	2	5
5	4	2	5	9	2	2	4	2	5

×

1 300
1 000
700
1 400
1 500
700
700
1 000
600
1 100

=

10 000
43 600
45 900

Il faut maintenant faire le produit de la matrice inverse de A'A par la matrice A'S

0,782927	-0,146341	-0,024390
-0,146341	0,067073	-0,030488
-0,024390	-0,030488	0,036585

×

10 000
43 600
45 900

=

329,30
61,57
106,08

On peut donc dire que les coûts fixes de la section sont de 329,30, et que les coûts unitaires variables de transformation de 1 kg de X et de 1 kg de Y sont respectivement de 61,57 et 106,08.

Seconde question : valeur de la liaison linéaire exprimant le corrélation

On peut écrire que :

$$S = 329,30 + 61,57 x + 106,08 y \text{ ou } S - 329,30 = 61,57 x + 106,08 y$$

Il est possible de déterminer un coefficient de corrélation multiple entre S, x et y

On peut pour cela passer par la matrice de corrélation de Pearson.

Il s'agit de calculer les coefficient de corrélation linéaire entre S et x, entre Set y et entre x et y.

Le calcul du coefficient de corrélation entre deux variables X et Y est donné par la formule (dite simplifiée)

$$r = \frac{n \sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[n \sum X^2 - (\sum X)^2][n \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

La somme des S au carré (non donnée dans l'énoncé) est de 10 940 000.

Coefficient de corrélation entre S et X

$$r = \frac{10 \times 43600 - 10000 \times 40}{\sqrt{(10 \times 10940000 - 10000 \times 10000)(10 \times 184 - 40 \times 40)}} = 36000 / 47497 = 0,7579$$

Coefficient de corrélation entre S et Y

$$r = \frac{10 \times 45900 - 10000 \times 40}{\sqrt{(10 \times 10940000 - 10000 \times 10000)(10 \times 204 - 40 \times 40)}} = 59000 / 64312 = 0,9174$$

Coefficient de corrélation entre X et Y

$$r = \frac{10 \times 180 - 40 \times 40}{\sqrt{(10 \times 184 - 40 \times 40)(10 \times 204 - 40 \times 40)}} = 200 / 324,96 = 0,6155$$

La matrice de Pearson se présente comme suit

	S	X	Y
S	1,0000	0,7579	0,9174
X	0,7579	1,0000	0,6155
Y	0,9174	0,6155	1,0000

On constate une excellente corrélation entre S et Y et une corrélation plus faible entre S et X, la corrélation entre X et Y, quoique non négligeable, n'étant pas significative.

Le coefficient de corrélation multiple peut donc être estimé à $0,7579 \times 0,9174 = 0,6968$ ce qui reste un coefficient de corrélation satisfaisant.

Troisième question : conséquence sur l'application du contrôle des coûts.

Le coefficient de corrélation étant tout à fait valable, on peut se servir de la formule $S = 329,30 + 61,57 x + 106,08 y$ pour déterminer les coûts prévisionnels en fonction des quantités x et y

Pour les 10 périodes analysées, on aurait les résultats suivants et les écarts suivants :

Périodes	Prévision : $S = 329,30 + 61,57 x + 106,08 y$	Coût de la section	Ecart constaté
1	1 229,12	1 300	70,88
2	999,90	1 000	0,10
3	787,74	700	- 87,74
4	1 229,12	1 400	170,88
5	1 653,44	1 500	- 153,44
6	664,60	700	35,40
7	787,74	700	- 87,74
8	999,90	1 000	0,10
9	664,60	600	- 64,60
10	982,84	1 100	117,16

Les écarts significatifs (par exemple supérieurs à 10 % de prévision) méritent une analyse approfondie. Ce serait le cas des coûts de section des périodes 3, 4, 7 et 10, ce qui représente quand même 4 périodes sur 7. Si le coefficient de corrélation aurait été supérieur, on aurait eu moins d'écart. Compte tenu du coefficient de corrélation plus faible en ce qui concerne le produit X que le produit Y, l'analyse particulière portera sur les coûts du produit X.

THEME 3

1) Détermination de l'optimum de B

Il est possible d'établir l'optimum de B lorsque A livre un volume de production conforme à l'une de ses solutions de base réalisables, soit par une méthode graphique, soit en utilisant le simplexe de Dantzig. La méthode graphique est plus simple lorsqu'il y a deux variables, dans le cas contraire, il faut utiliser la méthode du simplexe.

Il y a trois contraintes pour l'atelier A :

- (1) $3 L + 2 M \leq 120$
- (2) $L + 2M \leq 80$
- (3) $3 L + M \leq 105$

Il faut rechercher, conformément à l'énoncé, quelle est la solution réalisable.

Si l'on optimise les contraintes (1) et (2) on obtient :

$$3 L + 2 M = 120$$

$$L + 2M = 80$$

ce qui donne théoriquement $L = 20$ et $M = 30$

Cette solution est compatible avec la contrainte (3) $3 \times 20 + 30 = 90 \leq 105$

Si l'on optimise les contraintes (1) et (3) on obtient :

$$(1) 3 L + 2 M = 120$$

$$(3) 3 L + M = 105$$

ce qui donne théoriquement $L = 30$ et $M = 15$

Cette solution est compatible avec la contrainte (2) $30 + 15 \times 2 = 60 < 80$

Si l'on optimise les contraintes (2) et (3) on obtient :

$$(2) L + 2M = 80$$

$$(3) 3 L + M = 105$$

ce qui donne théoriquement $L = 26$ et $M = 27$

Cette solution ne peut pas être retenue car elle est éliminée par la contrainte (1) :

$$3 \times 26 + 2 \times 27 = 132 > 120$$

Deux solutions peuvent être admises une solution avec $L = 20$ et $M = 30$ et une solution avec $L = 30$ et $M = 15$

Ce sont des solutions l'on peut traiter par le simplexe (puisqu'il y a trois variables X, Y et Z).

Alors que le sujet ne demande de traiter la « détermination de l'optimum de B lorsque A livre une production conforme à l'une de ses solutions de base réalisables », nous traiterons dans ces éléments de corrigé les deux solutions dégagées.

a) **Solution L = 20 et M = 30**

On a :

$$X + 3 Y + 6 Z \leq 20$$

$$3 X + 2 Y + Z \leq 30$$

$$F = 12 X + 15 Y + 18 Z = [\text{MAX}]$$

Les tableaux du simplexe conduisant à la solution de ce programme se présentent ainsi :

	x	y	z	e1	e2		R
x = 0			↓				
y = 0							
z = 0	12	15	18	0	0	0	
e1	1	3	{6}	1	0	20	10/3
e2	3	2	1	0	1	30	30

On sélectionne donc la colonne z et la ligne e1 car 10/3 est inférieur à 30 (la sélection est marquée par les signes {...}).

Et l'on obtient la première itération suivante :

	x	y	z	e1	e2		
x = 0	↓						
y = 0							
z = 10/3	9	6	0	-3	0	- 60	
z	1/6	1/2	1	1/6	0	10/3	60
e2	{17/6}	3/2	0	-1/6	1	80/3	40/17

On sélectionne la colonne x et la ligne e2.

Et l'on obtient le seconde itération suivante :

	x	y	z	e1	e2		
x = 160/17		↓					
y = 0							
z = 30/17	0	21/17	0	-42/17	- 54/17	- 2460/17	
z	0	{7/17}	1	3/17	- 1/17	30/17	30/7
x	1	9/17	0	-1/17	6/17	160/17	160/9

On sélectionne la colonne y et la ligne z.

Et l'on obtient le troisième itération suivante :

	x	y	z	e1	e2		
x = 50/7							
y = 30/7							
z = 0	0	0	-3	- 3	- 3	- 150	
y	0	1	17/7	3/7	- 1/7	30/7	
x	1	0	- 9/7	- 2/7	3/7	50/7	

L'optimum est atteint avec $x = 50/7$, $y = 30/7$ et $z = 0$ ce qui donne $50/7 \times 12 + 30/7 \times 15 = 150$

On peut aussi passer par le dual (qui aurait pu être traité par une méthode graphique).

Appelons P et Q les variables duales associées à X, Y et Z

On peut écrire que :

$$P + 3 Q \geq 12$$

$$3 P + 2 Q \geq 15$$

$$6 P + Q \geq 18$$

$$F2 = 20 P + 30 Q = \text{MIN}$$

Par une méthode graphique, puisqu'il y a deux variables (nous présenterons pas ici le graphique pour des raisons dactylographiques mais qui peut être imaginé facilement) on trouve :

1^{ère} équation : si $P = 0$ $Q = 4$ si $Q = 0$ $p = 12$

2^{ème} équation : si P = 0 Q = 7,5 si Q = 0 p = 5

3^{ème} équation : si P = 0 Q = 3 si Q = 0 p = 18

si F2 = 180 si P = 0 Q = 6 si Q = 0 p = 9

A la jonction de la 1^{ère} équation et de la 2^{ème} équation, on a P = 3 et Q = 3 et F2 = 150

A la jonction de la 1^{ère} équation et de la 3^{ème} équation, on a P = 42/17 et Q = 54/17 et F2 = 144,71

La solution de cette jonction n'est pas compatible avec la deuxième équation : on aurait $3 \times 42/17 + 2 \times 54/17 = 13,76 < 15$

A la jonction de la 2^{ème} équation et de la 3^{ème} équation, on a P = 7/3 et Q = 4 et F2 = 166,67

C'est donc la jonction de la 1^{ère} et de la 2^{ème} équation qui donne le résultat le plus faible soit 150. Elle correspond à une valeur de P = 3 et Q = 3.

De l'analyse que nous venons de faire, nous pouvons en tirer la synthèse suivante :

PRIMAL	F = 150	x	y	z	e1	e2
	valeurs optimales	3	3	0	0	0
	valeurs marginales				- 30/7	- 50/7
DUAL	F = 150	u1	u2	u3	p	q
	valeurs optimales	0	0	0	30/7	50/7
	valeurs marginales	- 3	- 5	0	0	0

b) solution L = 30 et M = 15

On a :

$$X + 3 Y + 6 Z \leq 30$$

$$3 X + 2 Y + Z \leq 15$$

$$F = 12 X + 15 Y + 18 Z = [\text{MAX}]$$

Les tableaux du simplexe conduisant à la solution de ce programme se présentent ainsi :

	x	y	z	e1	e2		R
x = 0 y = 0 z = 0			↓				
	12	15	18	0	0	0	
e1	1	3	{6}	1	0	30	5
e2	3	2	1	0	1	15	15

On sélectionne donc la colonne z et la ligne e1 car 30/6 est inférieur à 15/1

Et l'on obtient la première itération suivante :

	x	y	z	e1	e2		R
x = 0 y = 0 z = 5	↓						
	9	6	0	-3	0	- 90	
z	1/6	1/2	1	1/6	0	5	30
e2	{17/6}	3/2	0	-1/6	1	10	60/17

On sélectionne la colonne x et la ligne e2.

Et l'on obtient le seconde itération suivante :

	x	y	z	e1	e2		R
x = 60/17 y = 0 z = 75/17	↓						
	0	21/17	0	-42/17	- 54/17	- 2070/17	
z	0	7/17	1	3/17	- 1/17	75/17	75/7
x	1	{9/17}	0	-1/17	6/17	60/17	20/3

On sélectionne la colonne y et la ligne x.

Et l'on obtient le troisième itération suivante :

	x	y	z	e1	e2	
x = 0 y = 20/3 z = 5/3						
	- 7/3	0	0	- 7/3	- 4	- 130
z	- 7/9	0	1	2/9	- 1/3	5/3
y	17/9	1	0	-1/9	2/3	20/3

L'optimum est atteint avec $x = 0$ $y = 20/3$ et $z = 5/3$ ce qui donne $20/3 \times 15 + 5/3 \times 18 = 130$

On peut aussi passer par le dual.

Appelons P et Q les variables duales associées à X, Y et Z.

On peut écrire que :

$$P + 3 Q \geq 12$$

$$3 P + 2 Q \geq 15$$

$$6 P + Q \geq 18$$

$$F2 = 30 P + 15 Q = \text{MIN}$$

Par une méthode graphique (nous présenterons pas ici le graphique qui peut être imaginé facilement) on trouve :

$$1^{\text{ère}} \text{ équation : si } P = 0 \text{ } Q = 4 \quad \text{si } Q = 0 \text{ } p = 12$$

$$2^{\text{ème}} \text{ équation : si } P = 0 \text{ } Q = 7,5 \quad \text{si } Q = 0 \text{ } p = 5$$

$$3^{\text{ème}} \text{ équation : si } P = 0 \text{ } Q = 3 \quad \text{si } Q = 0 \text{ } p = 18$$

$$\text{si } F2 = 150 \text{ si } P = 0 \text{ } Q = 10 \quad \text{si } Q = 0 \text{ } p = 5$$

A la jonction de la 1^{ère} équation et de la 2^{ème} équation, on a $P = 3$ et $Q = 3$ et $F2 = 135$

A la jonction de la 1^{ère} équation et de la 3^{ème} équation, on a $P = 42/17$ et $Q = 54/17$ et $F2 = 121,76$

La solution de cette jonction n'est pas compatible avec la deuxième équation : on aurait $3 \times 42/17 + 2 \times 54/17 = 13,76 < 15$

A la jonction de la 2^{ème} équation et de la 3^{ème} équation, on a $P = 7/3$ et $Q = 4$ et $F2 = 130$

C'est donc la jonction de la 2^{ème} et de la 3^{ème} équation qui donne le résultat le plus faible soit 130. Elle correspond à une valeur de $P = 7/3$ et $Q = 4$.

De l'analyse que nous venons de faire, nous pouvons en tirer la synthèse suivante :

PRIMAL	F = 130	x	y	z	e1	e2
	valeurs optimales	0	20/3	5/3	0	0
	valeurs marginales				- 7/3	- 4
DUAL	F = 130	u1	u2	u3	p	q
	valeurs optimales	0	0	0	7/3	4
	valeurs marginales	0	- 20/3	- 5/3	0	0

En définitive, la solution $l = 20$ et $M = 30$ est plus avantageuse que la solution $L = 30$ et $M = 15$.

2) Détermination de l'optimum de A

Les prix duaux communiqués par le centre B (qui sont des coûts marginaux) sont soit 3 et 3 ou 7/3 et 4. Nous continuerons l'analyse de cette étude de cas avec les deux solutions.

a) Solution 3 et 3

On a donc pour A le système linéaire suivant :

$$3 L + 2 M \leq 120$$

$$L + 2 M \leq 80$$

$$3 L + M \leq 105$$

$$F = 3 L + 3 M \text{ [MAX]}$$

Par le simplexe (mais on aurait pu utiliser une méthode graphique), on obtient les analyses suivantes :

	l	m	e1	e2	e3		R
l = 0 m = 0	↓						
	3	3	0	0	0	0	
e1	3	1	1	0	0	120	40
e2	1	2	0	1	0	80	80
e3	{3}	1	0	0	1	105	35

On sélectionne la colonne l et la ligne e3.

	l	m	e1	e2	e3		R
l = 35 m = 0		↓					
	0	2	0	0	0	- 105	
e1	0	{1}	1	0	0	15	15
e2	0	5/3	0	1	0	45	27
l	1	1/3	0	0	1	35	105

On sélectionne la colonne m et la ligne e1.

	l	m	e1	e2	e3	
l = 30 m = 15						
	0	0	-2	0	0	- 135
m	0	1	1	0	0	15
e2	0	0	- 5/3	1	0	20
l	1	0	- 1/3	0	0	30

L'optimum est atteint avec l = 30 et m = 15 et $F = 3 \times 30 + 3 \times 15 = 135$

b) Solution 7/3 et 4

On a donc pour A le système linéaire suivant :

$$3L + 2M \leq 120$$

$$L + 2M \leq 80$$

$$3L + M \leq 105$$

$$F = 7/3 L + 4 M \text{ [MAX]}$$

Par le simplexe, on trouve la solution suivante (présentation simplifiée) :

7/3	4	0	0	0	0
3	2	1	0	0	120
1	2	0	1	0	80
3	1	0	0	0	105

1/3	0	0	-2	0	-160
2	0	1	-1	0	40
1/2	1	0	1/2	0	40
5/2	0	0	-1/2	0	65

0	0	-1/6	-11/6	0	-500/3
1	0	1/2	-1/2	0	20
0	1	-1/4	3/4	0	30
0	0	-5/4	3/4	0	15

L'optimum est atteint avec l = 20 et m = 30 et $F = 7/3 \times 20 + 4 \times 30 = 500/3$ ou $166 \frac{2}{3}$.

En définitive, on constate que la solution 1 de l'optimum de B correspond à la solution 2 de l'optimum de A et que la solution 2 de l'optimum de B correspond à la solution 1 de l'optimum de A.

3) Nouvelle détermination de l'optimum de B lorsque A livre les quantités L et M optimisées en 2.

Puisque nous avons effectué les calculs selon les deux solutions de base admissibles et que les solutions trouvées maxima sont réciproques, il n'est plus besoin de refaire les calculs. Le candidat, qui, à la question 1, avait choisi la solution a ($L = 20 = M = 30$), devrait alors effectuer le calcul selon la solution b ($L = 30 = M = 15$). Le candidat, qui, à la question 1, avait choisi la solution b ($L = 30 = M = 15$), devrait alors effectuer le calcul selon la solution a ($L = 20 = M = 30$).

4) Discussion

Il n'existe pas d'optimum global, qui maximise à la fois le résultat du centre A et celui du centre B. Le prix de cession de A à B qui a été pris en compte est un coût marginal et n'est d'ailleurs pas représentatif du coût global. Ce qui importe en définitive pour l'entité, c'est que la marge sur coût variable dégagée sur le produit fini soit maximum. Dans ce cas, c'est la solution $L = 20 = M = 30$ $X = 50/7$, $Y = 30/7$ et $Z = 0$ qui fournit la meilleure marge soit $12 \times 50/7 + 15 \times 30/7 = 150$.